# Prednáška 10

## 10.1. Parametrické integrály

V tejto časti sa budeme zaoberať integrálmi závisiacimi od parametra. Lebesgueova veta 9.0.22 nám umožní odvodiť dôležité vety týkajúce sa takýchto integrálov. Získame tak nové možnosti výpočtu určitých integrálov. V nutných prípadoch pomocou nich zavedieme nové - tzv. špeciálne funkcie.

**Príklad 10.1.1.**

Integrál

$$F(\alpha) = \int_0^1 \alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\alpha} - 1$$

nám definuje funkciu závislú od premennej $\alpha$.

Budeme sa zaoberať vlastnosťami podobných funkcií (ako funkcie premenných **a**) v závislosti od integrandu. Uvažujme reálne funkcie $f(\mathbf{x};\mathbf{a})$ definované pre s.v. $\mathbf{x} \in M \in \mathcal{M}_n$, $\alpha \in A \subset \mathbb{R}^p$. (pre jednoduchosť si predstavte iba jeden parameter $a$). Takže integrujeme podľa premenných $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a prvky $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ budeme nazývať parametre. Zaujíma nás, kedy má funkcia

$$F(\mathbf{a}) = \int_M f(\mathbf{x};\mathbf{a})\, \mathrm{d}\lambda_n \tag{10.1}$$

limitu pre $\mathbf{a} \to \mathbf{a_0}$, resp. kedy je spojitá a či tam má deriváciu. Taktiež nás môže zaujímať, pre ktoré $\mathbf{a} \in A$ integrál konverguje.

**Veta 10.1.2** (O limite).

Nech $M \in \mathcal{M}_n$, $A \subset \mathbb{R}^p$ a $\mathbf{a}_0$ je hromadný bod množiny $A$. Nech funkcia $f : M \times (A \setminus \{\mathbf{a}_0\}) \to \mathbb{R}$ spĺňa:

(i) Pre každé $\mathbf{a} \in A \setminus \{\mathbf{a}_0\}$ je merateľná na $M$ (ako funkcia $\mathbf{x}$).

(ii) Pre s.v. $\mathbf{x} \in M$ existujú vlastné limity $\lim\limits_{\mathbf{a}\to\mathbf{a}_0} f(\mathbf{x};\mathbf{a}) = \tilde{f}(\mathbf{x})$.

(iii) Existuje $g \in \mathcal{L}_n(M)$ tak, že $|f(\mathbf{x};\mathbf{a})| \leq g(\mathbf{x})$ pre s.v. $\mathbf{x} \in M$ a všetky $\mathbf{a} \in A \setminus \{\mathbf{a}_0\}$.

Potom pre každé $\mathbf{a} \in A \setminus \{\mathbf{a}_0\}$ je $f \in \mathcal{L}_n(M)$ a $\tilde{f} \in \mathcal{L}_n(M)$ a funkcia 10.1 má v bode $\mathbf{a_0}$ limitu rovnú

$$\lim_{\mathbf{a}\to\mathbf{a_0}} F(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{a}\to\mathbf{a_0}} \int_M f(\mathbf{x};\mathbf{a})\,\mathrm{d}\lambda_n = \int_M \lim_{\mathbf{a}\to\mathbf{a_0}} f(\mathbf{x};\mathbf{a})\,\mathrm{d}\lambda_n = \int_M \tilde{f}\,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Všimnime si, že v predchádzajúcej vete môže byť okolie ľubovoľne malé, čo nám môže zjednodušiť hľadanie majoranty.

**Príklad 10.1.3.**

Máme nájsť

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Zrejme $f(x;\alpha) \to 0$ pre $\alpha \to 0$ a každé $x > 0$. Potrebujeme nájsť majorantu integrandu na $U^*(0)$. Zvoľme funkciu $g_A(x) = \frac{\ln(1+A^2x^2)}{x^2}$, $A > 0$. Zrejme $|f(x;\alpha)| \leq g_A(x)$ pre $x > 0$ a $|\alpha| \leq A$. Stačí teda ukázať, že $g_A \in \mathcal{L}_1(0,\infty)$. Vieme, že $\lim\limits_{x\to 0^+} g_A(x) = A^2$, takže $g$ je ohraničená a spojitá na $(0,1)$, a teda je z $\mathcal{L}_1(0,1)$. Ukážme, že je aj z $\mathcal{L}_1(1,\infty)$. Podľa l'Hospitalovho pravidla je limita funkcie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+A^2x^2)}{\sqrt{x}} = 0,$$

takže je táto funkcia ohraničená na $[1,\infty)$. Potom však $g_A(x) \leq K\,x^{-3/2} \in \mathcal{L}_1(1,\infty)$, a teda aj $g_A \in \mathcal{L}_1(1,\infty)$. Takže podľa vety

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^\infty \lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = 0.$$

**Poznámka 10.1.4.**

V príklade 10.1.3 sa dá pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ spočítať integrál a teda aj funkcia závislá od $\alpha$ explicitne, konkrétne $F(\alpha) = \pi|\alpha|$. To však nie je častý jav ani v praktických úlohách.

**Veta 10.1.5** (O spojitosti)**.**

Nech $M \in \mathcal{M}_n$, $A \subset \mathbb{R}^p$ a $\mathbf{a}_0 \in A$. Nech funkcia $f : M \times A \to \mathbb{R}$ spĺňa:

(i) Pre nejaké $\delta > 0$ je merateľná na $M$ (ako funkcia $\mathbf{x}$) pre $\mathbf{a} \in U_\delta(\mathbf{a_0}) \cap A$.

(ii) Pre s.v. $\mathbf{x} \in M$ je spojitá v $\mathbf{a}_0$ (ako funkcia $\mathbf{a}$).

(iii) Existuje $g \in \mathcal{L}_n(M)$ tak, že $|f(\mathbf{x}; \mathbf{a})| \leq g(\mathbf{x})$ pre s.v. $\mathbf{x} \in M$ a $\mathbf{a} \in U_\delta(\mathbf{a_0}) \cap A$.

Potom funkcia 10.1 je spojitá v $\mathbf{a}_0$ .

**Príklad 10.1.6.**

My už vieme, že funkcia z príkladu 10.1.3 je spojitá na $\mathbb{R}$. Dokážme to však bez toho, aby sme poznali jej predpis. Už sme našli jej majorantu pre každé $A > |\alpha|$. Keďže integrand je pre každé $x > 0$ spojitá funkcia $(\alpha)$ na intervale $[-A, A]$, dostávame spojitosť $F(\alpha)$ na $[-A, A]$. Ale to je pravda pre každé $A$.

V nasledujúcom príklade, nie je možné explicitne vyjadriť funkciu $F$ (bez znalosti špeciálnych funkcií). Napriek tomu vieme o nej povedať, kedy je spojitá.

**Príklad 10.1.7.**

Ukážeme, že funkcia

$$F(b) = (L)\int_0^1 \frac{x^b}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

je spojitá len pre niektoré $b$. Integrand je spojitý na $(0,1) \times (-1, \infty)$ ako funkcia dvoch premenných. Je preto spojitá podľa $b$ a merateľná podľa $x$. Najmenšia funkcia $g$, pre ktorú platí $|f(x; b)| \leq g(x)$ pre $x \in (0, 1)$ a $b > -1$ je funkcia $\frac{1}{x(x+1)}$. Tá ale nemá konečný integrál na $(0, 1)$. Situácia sa zmení, keď zoberieme $b > -1 + \delta$, $\delta > 0$. Funkcia $g_\delta(x) = \frac{1}{x^{1-\delta}(x+1)}$ je z $\mathcal{L}_1((0, 1))$. Teda funkcia $F$ je spojitá na každom $(-1 + \delta, \infty)$ a teda aj na zjednotení týchto intervalov, tj. na $(-1, \infty)$.

**Problém 10.1.8.**

Ukážte, že funkcia $F$ je nespojitá v každom $b = -k,\ k \in \mathbb{N}$.

**Veta 10.1.9** (O derivácii)**.**

Nech $M \in \mathcal{M}_n,\ A \subset \mathbb{R}^p$ je otvorená. Nech funkcia $f : M \times A \to \mathbb{R}$ spĺňa:

(i) $f \in \mathcal{L}_n(M)$ pre každé $\mathbf{a} \in A$.

(ii) Pre pevné $j$ existuje vlastná derivácia $\dfrac{\partial f}{\partial a_j}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ pre $\mathbf{a} \in A$ a s.v. $\mathbf{x} \in M$.

(iii) Existuje $g \in \mathcal{L}_n(M)$ tak, že $\left|\dfrac{\partial f}{\partial a_j}(\mathbf{x}; \mathbf{a})\right| \leq g(\mathbf{x})$ pre s.v. $\mathbf{x} \in M$ a $\mathbf{a} \in A$.

Potom funkcia 10.1 je má na $A$ parciálnu deriváciu podľa $a_j$ a platí

$$\frac{\partial F}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_j} \int_M f(\mathbf{x}; \mathbf{a})\, \mathrm{d}\lambda_n = \int_M \frac{\partial f}{\partial a_j}(\mathbf{x}; \mathbf{a})\, \mathrm{d}\lambda_n.$$

**Poznámka 10.1.10.**

Túto vetu môžeme za príslušných predpokladov použiť opakovane a dokázať existenciu derivácie vyšších rádov. V predchádzajúcich vetách je najťažšie nájsť integrovateľnú majorantu. Niekedy sa ju nepodarí nájsť pre všetky parametre $\mathbf{a}$, ale napríklad len pre každú ohraničenú podmnožinu množiny $A$. Takéto použitie nám aj tak dá požadovanú vlastnosť pre všetky $\mathbf{a} \in A$.

**Príklad 10.1.11.**

Nech $\beta > 0$, pre $\alpha$ chceme spočítať integrál $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx$. Použijeme vetu o derivácii parametrického integrálu. Integrand splňuje požiadavky $(i), (ii)$ pre $x > 0,\ \alpha > 0$. (Overte.) Chceme nájsť integrovateľnú majorantu k $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha x}$. Pre všetky $\alpha > 0$ ju nenájdeme, lebo $\sup\limits_{\alpha>0} |-e^{-\alpha x}| = 1$ pre $x > 0$ a funkcia identicky rovná 1 má na $(0, \infty)$ divergentný integrál. Vezmime však pevné (ľubovoľné) $\delta > 0$, potom pre $\alpha \geq \delta$ už ňou bude funkcia $e^{-\delta x}$. Teda podľa vety máme

$$F'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{1}{\alpha},$$

pre ľubovoľné $\alpha > 0$. To je diferenciálna rovnica pre $F(\alpha)$. Jej všeobecné riešenie je $F(\alpha) = C - \ln \alpha$. Konštantu $C$ určíme z podmienky $F(\beta) = 0$. A teda $F(\alpha) = \ln \beta/\alpha,\ \alpha > 0$.

Teraz zavedieme dôležitý pojem konvolúcie dvoch funkcií, často využívaný pri spracovávaní obrazu, ktorý sa o.i. dá využiť aj pri riešení diferenciálnych rovníc.

**Definícia 10.1.12.**

Nech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, potom ich konvolúciou $h = f * g$ nazývame funkciu, definovanú predpisom

$$h(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$

pre tie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pre ktoré má uvedený (Lebesgueov) integrál zmysel.

Funkcii $f$ sa hovorí konvolučné jadro. Substitúciou $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$ sa ľahko ukáže platnosť rovnosti $f * g = g * f$. Pozrime sa na postačujúce podmienky na existenciu konvolúcie dvoch funkcií. Pokiaľ ide o konvolúciu v spracovávaní obrazu je funkcia $g$ skúmaný obrázok a $f$ nejaký filter. Podmienky pre existenciu konvolúcie môžu byť komplikované, pretože blow-up funkcie $g$ v nekonečne možno ľahko kompenzovť dostatočne rýchlym klesaním funkcie $f$. Otázka existencie tak môže zahŕňať rôzne podmienky na $f$ a $g$. Pripomeňme, že množina lokálne integrovateľných funkcií je definovaná ako

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}^1(M) \text{ pre každú kompaktnú M} \subset \mathbb{R}^n\}.$$

**Príklad 10.1.13.**

Funkcia $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nie je z $\mathcal{L}^1_{loc}(A)$, kde $A \subseteq \mathbb{R}$ obsahuje nulu.

**Veta 10.1.14** (Postačujúce podmienky na existenciu konvolúcie)**.**

(I) Nech $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n), 1/p + 1/q = 1$, potom $f * g$ existuje na $\mathbb{R}^n$ a $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$.

(II) Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty)$, potom $f * g$ existuje s.v. na $\mathbb{R}^n$, je v $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ a $\|f * g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^p}$.

(III) Nech $f, g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f = A, \operatorname{supp} g = B$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$, pričom pre každé $K > 0$ je množina

$$T_K = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B, |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq K\}$$

je ohraničená. Potom $f * g$ existuje s.v. na $\mathbb{R}^n$ a je v $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

**Veta 10.1.15** (Vlastnosti konvolúcie)**.**

a) Priestor $\mathcal{L}^1$ s operáciou konvolúcie tvorí komutatívnu algebru bez identity.

b) Nech $f$ je diferencovateľná a konvolúcie $f * g, f' * g$ sú definované, potom $f * g$ je diferencovateľná a $\frac{\partial}{x_i}(f * g) = \frac{\partial}{x_i} f * g$.

c) $\overline{f * g} = \overline{f} * \overline{g}$

d) Pre $f, g \in \mathcal{L}^1$ je $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$

**Poznámka 10.1.16.**

Ak by sme pracovali v priestoroch distribúcií, potom Diracova distribúcia (nie je to funkcia v klasickom zmysle) je chýbajúcou jednotkou (identitou).